Lunghezza di una curva

Sia

$$y = f(x)$$

la lunghezza di tale curva è:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx$$

Se la curva è data in forma implicita:

$$F(x; y) = 0$$

allora:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \frac{F_x'^2(x; y)}{F_y'^2(x; y)}}\,dx$$

Se la curva è data in forma parametrica:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(x)}\,dt$$

Se la curva è data in forma polare:

$$\rho = f(\vartheta)$$

$$L = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{\rho^2(\vartheta) + \rho'^2(\vartheta)}\,d\vartheta$$

Esempio 1

Determinare la lunghezza della curva di equazione $y = 2\sqrt{5x^3}$ situata nel primo quadrante compreso fra le ordinate corrispondenti alle ascisse *x=0* e *x=1*.

Applichiamo $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$

Calcoliamo la derivata di $y = 2\sqrt{5x^3}$

$$f'(x) = 2\frac{15x^2}{2\sqrt{5x^3}} = \frac{15x^2}{\sqrt{5x^3}}$$

Pertanto:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{15x^2}{\sqrt{5x^3}}\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1+9x}dx = \int_0^1 (1+9x)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{9}\int_0^1 (1+9x)^{\frac{1}{2}} \cdot 9dx = \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3}\left[(1+9x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{27}(10\sqrt{10} - 1)$$

Esempio 2

Determinare la lunghezza dell'arco di curva di equazione:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 \\ y = \frac{1}{3}t^3 \end{cases}$$

Nell'intervallo

$$0 \le t \le 2$$

Calcoliamo le derivate:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}2t \\ y' = \frac{1}{3}3t^2 \end{cases} ; \begin{cases} x' = t \\ y' = t^2 \end{cases}$$

Pertanto:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(x)}dt = \int_0^2 \sqrt{t^2 + t^4}dt = \int_0^2 t\sqrt{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\int_0^2 (1+t^2)^{1/2} 2tdt = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\left[(1+t^2)^{3/2}\right]_0^2 = \frac{1}{3}(5\sqrt{5}-1)$$

Esempio 3

Data la curva

$$\rho = sen\vartheta + \cos\vartheta$$

determinare la sua lunghezza nell'intervallo $0 \le \vartheta \le \pi$

Applichiamo:

$$L = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{\rho^2(\vartheta) + \rho'^2(\vartheta)}\,d\vartheta$$

Calcoliamo la derivata di $\rho = sen\vartheta + \cos\vartheta$:

$$\rho' = \cos\vartheta - sen\vartheta$$

$$L = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{\rho^2(\vartheta) + \rho'^2(\vartheta)}\,d\vartheta = \int_0^{\pi} \sqrt{(sen\vartheta + \cos\vartheta)^2 + (\cos\vartheta - sen\vartheta)^2}\,d\vartheta = \int_0^{\pi} \sqrt{2}\,d\vartheta = \sqrt{2}\left[\vartheta\right]_0^{\pi} = \sqrt{2}\pi$$